lec2

$$[x+iy]^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)}$$
$$= r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right]$$

Ex: Find roots of $(z+1)^7 + z^7 = 0$

sol

$(z+1)^7 = -z^7$

$\left(\frac{z+1}{z}\right)^7 = -1$

$\frac{z+1}{z} = (-1)^{\frac{1}{7}}$

$x = -1 \;,\; y = 0$

$r = \sqrt{x^2+y^2} = 1$

$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} = \tan^{-1}\left(\frac{0}{-1}\right) = \pi$

$\frac{z_k+1}{z_k} = 1^{\frac{1}{7}} \cdot e^{i\left(\frac{\pi+2k\pi}{7}\right)} = \cos\left(\frac{\pi+2k\pi}{7}\right) + i\sin\left(\frac{\pi+2k\pi}{7}\right) \qquad k = 0, 1, 2$

$z_k + 1 = e^{\left(\frac{\pi+2k\pi}{7}\right)} z_k$

$1 = \left(e^{\left(\frac{\pi+2k\pi}{7}\right)} - 1\right) z_k$

$z_k = \frac{1}{e^{\frac{\pi+2k\pi}{7}} - 1}$

$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 = 0$

① مجموع الجذور $= -\frac{a_{n-1}}{a_n}$

② مجموع حاصل ضرب الجذور مثنى مثنى $= \frac{a_{n-2}}{a_n}$

⋮

حاصل ضرب الجذور $= (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$

Ex: Use $z^n - 1 = 0$; $n = 2, 3, \dots$ to find Show:

ⓐ $\cos\frac{2\pi}{n} + \cos\frac{4\pi}{n} + \dots + \cos\frac{2(n-1)\pi}{n} = -1$

ⓑ $\sin\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{4\pi}{n} + \dots + \sin\frac{2(n-1)\pi}{n} = 0$

ⓒ $\left(\sin^2\frac{\pi}{n}\right)\left(\sin^2\frac{2\pi}{n}\right)\dots\left(\sin^2\frac{(n-1)\pi}{n}\right) = 2^{\left(\frac{-n^2}{2n-1}\right)}$ $\quad \frac{n}{2^{n-1}}$

$Z^n - 1 = 0 \Rightarrow Z = (1)^{\frac{1}{n}}$

$X = 1 \;,\; y = 0 \;,\; r = 1 \;,\; \theta = 0$

$\cancel{Z = re}$

$Z = re^{i\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)} = e^{\frac{2k\pi}{n} i}$

The roots $Z_k = e^{\frac{2k\pi}{n} i} \quad , k = 0, 1, \dots, n-1$

مجموع الجذور = صفر (معامل $Z^{n-1} = 0$)

$Z_0 + Z_1 + Z_2 + \dots + Z_{(n-1)} = 0$

$\quad\; k=1 \quad k=2$

$+ e^{\frac{2\pi}{n} i} + e^{\frac{4\pi}{n} i} + \dots + e^{\frac{2(n-1)\pi}{n} i} = 0$

$(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}) + (\cos\frac{4\pi}{n} + i\sin\frac{4\pi}{n}) + \dots + (\cos\frac{2(n-1)\pi}{n} + i\sin\frac{2(n-1)\pi}{n}) = 0$

نساوي الحقيقي بالحقيقي

$\cos\frac{2\pi}{n} + \cos\frac{4\pi}{n} + \dots + \cos\frac{2(n-1)\pi}{n} = 0$

$\cos\frac{2\pi}{n} + \qquad = -1$

نساوي التخيلي بالتخيلي

$\sin\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{4\pi}{2} + \dots + \sin\frac{2(n-1)\pi}{n} = 0$

Curves and rigion on complex plan

المنحنيات والمناطق في مستوى الارجند (مستوى الأعداد المركبة).

$|Z - Z_0| = C$

المحل الهندسي لجميع النقط التي تتحرك في Z plan بحيث أن بعدها عن نقطة ثابتة يساوي مقدار ثابت

هامش:

$Z = x + iy$

$Z_0 = x_0 + iy_0$

$|Z - Z_0| = |(x - x_0) + i(y - y_0)| = C$

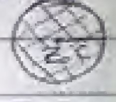
$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = C$

$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = C^2$

دائرة مركزها (x_0, y_0) ونصف قطرها C

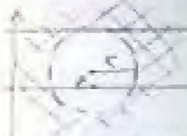
② $|z - z_0| \leqslant C$

النطقه داخل الدائره التي مركزها z_0 ونصف قطرها C



③ $|z - z_0| > C$

النطقه خارج الدائرة



④ $C_2 \leqslant |z - z_0| \leqslant C_1$

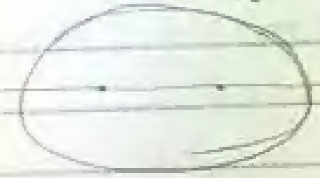
annuluc حلقة

⑤ $|z - z_1| \leqslant |z - z_2|$

* المحل الهندسي لجميع النقط التي تتحرك بحيث بعدها عن z_1 أقل من أو يساوي بعدها عن z_2 (خلينا الأول في حالة التساوي)
* الشكل الناتج خط عمودي على المسافة والتهشير يكون في المنطقة التي تقع فيها z_1

⑥ $|z - z_1| + |z - z_2| = C$

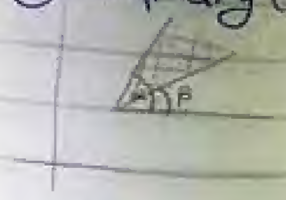
* نلاحظ أن هذه المعادلة تعطي المحل الهندسي لجميع النقط التي مجموع بعديها عن نقطتين ثابتتين يساوي مقدار ثابت
* قطع ناقص بؤرتيه z_1 و z_2 وطول محوره الأكبر C



⑦ $\arg(z - z_0) = \alpha$

⑧ $0 \leqslant \arg(z - z_0) \leqslant \alpha$

⑨ $\alpha \leqslant \arg(z - z_0) \leqslant \beta$



Ex: Find Curves and regions graphically:

ⓐ $|z - i| < 2$

ⓑ $|z - i| + |z + i| = 4$

ⓒ $|\arg(z + 3i)^3| \leqslant \pi$

Sol.

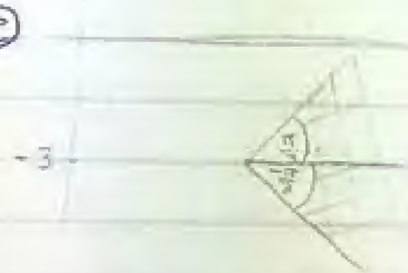
ⓐ

دائرة مركزها i ← $x_0 = 0, y_0 = 1$
ونصف قطرها 2 والتهشير داخل الدائرة

ⓑ

قطع ناقص بؤرتيه $z_1 = i, z_2 = -i$
وطول محوره الأكبر 4

ⓒ



$-\pi \leqslant \arg(z - (5 - 3i))^3 \leqslant \pi$

$-\pi \leqslant 3 \arg(z - (5 - 3i))^3 \leqslant \pi$

The Complex Functions

$z = re^{i\theta}$

$z = x + iy$

حيث أن الأعداد المركبة يمكن أن تكون بطريقتين:
وكلاهما عند الفك يحتوي على جزء حقيقي وجزء تخيلي
عند الفك جميع الدوال نستخدم عدا $\ln z$, z^2 ,
تستبدل z بأحدى قيمها.

Ex: Put the following f^{ns} in form $f(z) = u + iv$

① $f(z) = e^{5z}$

② $f(z) = z^5$

③ $f(z) = \ln z$

④ $f(z) = \sin z$

Sol

① $f(z) = e^{5z}$; $z = x + iy$

$= e^{5(x+iy)} = e^{5x} \cdot e^{5iy} = e^{5x}(\cos(5y) + i\sin(5y))$

$\therefore u = e^{5x}\cos(5y)$

$v = e^{5x}\sin(5y)$

② $f(z) = z^5 = (re^{i\theta})^5 = r^5[\cos(5\theta) + i\sin(5\theta)]$

$\therefore u = r^5\cos(5\theta)$

$v = r^5\sin(5\theta)$

* لو عوضت عن $z = (x+iy)$ صح بس طويل هتفك بذات الحدين $(x+iy)^5$

③ $f(z) = \ln(z)$, $z = re^{i(\theta \pm 2\pi k)}$

$= \ln(re^{i(\theta \pm 2\pi k)}) = \ln r + \ln e^{i(\theta \pm 2\pi k)}$

$= \ln r + i(\theta \pm 2\pi k)$, $\ln e = 1$

at $k = 0$. the value is principal value.

④ $f(z) = \sin(z)$, $z = x + iy$

$= \sin(x+iy) = \sin x \cos iy + \cos x \sin iy$

* الـ cos زي ما هيا كل الإشارة بياكل الـ i وتقلب cosh

والـ sin زي ما يتطلع الإشارة بتطلع الـ i وتقلب sinh

$\therefore \sin z = \sin x \cosh y + i\cos x \sinh y$

$\therefore u = \sin x . \cosh y$

$v = \cos x . \sinh y$

$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2}$

$\sinh = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}$

$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$

$\cosh = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$

$\cos iz = \cosh z$

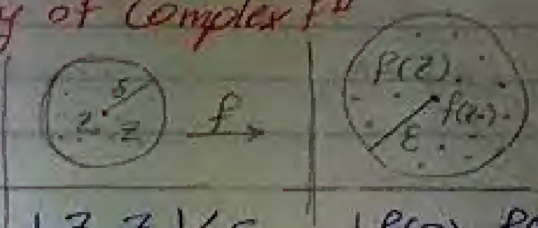
$\sin iz = i\sinh z$

$\cosh iz = \cos z$

$\sinh iz = i\sin z$

The Continuity of Complex f^n

given $\varepsilon > 0$ there is exist $\delta > 0$ such that if $|z - z_0| < \delta$ then $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$



$|z - z_0| < \delta$ $\quad$ $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$

الدالة تكون متصلة عند نقطة إذا تحقق الشروط الثلاثة:

① الدالة معرفة عند z_0

② النهاية موجودة عند z_0

$\lim_{z \to z_0} f(z_0)$ is exist

③ النهاية = قيمة التعريف

$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$